घन और घनमूल (Cubes and Cube Roots)

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» घन और हार्डी-रामानुजन संख्या का परिचय

» पूर्ण घन संख्याएँ

» रोचक प्रतिरूप – क्रमागत विषम संख्याओं का योग

» घन और अभाज्य गुणनखंडन

» पूर्ण घन बनाने हेतु सबसे छोटी संख्या ज्ञात करना

» घनमूल का परिचय

» अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा घनमूल ज्ञात करना

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. 1729 को हार्डी-रामानुजन संख्या क्यों कहा जाता है? सिद्ध कीजिए।

› पहला तरीका: $12^3 = 1728$, तो $1^3 + 12^3 = 1 + 1728 = 1729$

› दूसरा तरीका: $10^3 = 1000$ और $9^3 = 729$, तो $9^3 + 10^3 = 1000 + 729 = 1729$

› दोनों तरीकों से योग 1729 ही आता है, इसलिए यह दो अलग-अलग तरीकों से दो घनों के योग के रूप में लिखी जा सकने वाली सबसे छोटी संख्या है।

उत्तर – $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$

उदाहरण 2. क्या 100 एक पूर्ण घन संख्या है? कारण सहित बताइए।

› 100 के आसपास के घन देखें: $4^3=64$ और $5^3=125$

› 100, 64 और 125 के बीच में आता है, किसी भी प्राकृत संख्या का घन नहीं है

› इसलिए 100 पूर्ण घन नहीं है।

उत्तर – नहीं, 100 पूर्ण घन नहीं है।

उदाहरण 3. 10^3 प्राप्त करने के लिए कितनी क्रमागत विषम संख्याओं की आवश्यकता होगी, और वे कौन सी हैं?

› 10^3 के लिए ठीक 10 क्रमागत विषम संख्याएँ चाहिए।

› पहली विषम संख्या ज्ञात करने का सूत्र: $n(n-1)+1 = 10\times9+1 = 91$

› अतः संख्याएँ हैं: 91,93,95,...,109 (कुल 10 संख्याएँ), इनका योग $1000 = 10^3$ होगा।

उत्तर – 10 क्रमागत विषम संख्याएँ चाहिए, शुरुआत 91 से।

उदाहरण 4. क्या 500 एक पूर्ण घन है? अभाज्य गुणनखंडन विधि से जाँच कीजिए।

› 500 का अभाज्य गुणनखंडन कीजिए: $500 = 2\times2\times5\times5\times5$

› गुणनखंडों को गिनें: 2 केवल दो बार है, 5 तीन बार है

› चूँकि 2 का त्रिक (triplet) नहीं बना, 500 पूर्ण घन नहीं है।

उत्तर – नहीं, 500 पूर्ण घन नहीं है।

उदाहरण 5. 1188 को किस सबसे छोटी संख्या से भाग दिया जाए कि भागफल पूर्ण घन बने?

› 1188 का अभाज्य गुणनखंडन कीजिए: 1188 = 2×2×3×3×3×11

› गुणनखंड गिनें: 3 का त्रिक पूरा है, पर 2 दो बार और 11 एक बार है

› अपूर्ण गुणनखंड (2×2×11=44) से भाग देने पर भागफल पूर्ण घन बनेगा: 1188÷44 = 27 = 3^3

उत्तर – सबसे छोटी संख्या 44 है; भागफल 27 (=3^3) एक पूर्ण घन है।

उदाहरण 6. यदि किसी घन (cube) का आयतन 512 cm^3 है, तो उसकी भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

› हमें वह संख्या चाहिए जिसका घन 512 हो, यानी 512 ज्ञात करना है।

› तालिका से याद है: 8^3 = 512

› इसलिए 512 = 8

उत्तर – भुजा की लंबाई 8 cm है।

उदाहरण 7. अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा 10648 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

› 10648 का अभाज्य गुणनखंडन कीजिए: 10648 = 2×2×2×11×11×11

› गुणनखंडों के त्रिक बनाइए: (2×2×2) और (11×11×11), यानी 2^3×11^3 = $(2×11)^3$

› हर त्रिक में से एक-एक निकालकर गुणा करें: 2×11 = 22

उत्तर – 10648 = 22

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• परीक्षा में अक्सर 1729 की कहानी और उसके दो घनों के योग वाला सवाल पूछा जाता है – दोनों जोड़े (1,12) और (9,10) याद रखें।

• 'कौन सी संख्या पूर्ण घन नहीं है' टाइप सवाल में हमेशा नज़दीकी घनों (जैसे 64 और 125) के बीच जाँच करें।

• पैटर्न वाले सवालों में हमेशा पहले 2-3 दिए गए उदाहरण ध्यान से देखें, फिर पैटर्न आगे बढ़ाएँ – जल्दबाज़ी में उत्तर न लिखें।

• फैक्टर ट्री बनाकर हल करें और हर अभाज्य संख्या को गिनकर तीन-तीन के गुट बनाएं – इससे गलती की संभावना कम होती है।

• इस टाइप के सवाल में हमेशा पहले पूरा अभाज्य गुणनखंडन लिखें, फिर हर अभाज्य संख्या की गिनती करें – जल्दबाज़ी में गिनती गलत होने से पूरा उत्तर गलत हो जाता है।

• 1 से 10 तक के घनों की टेबल ज़बानी याद रखें – घनमूल के सवाल इसी टेबल से सीधे हल हो जाते हैं।

• बड़ी संख्याओं का घनमूल निकालते समय पहले फैक्टर ट्री बनाएं, फिर गुणनखंडों को क्रम से लिखकर त्रिक बनाएं – इससे कोई गुणनखंड छूटेगा नहीं।

एक नज़र में रिवीज़न

› a^3 = a × a × a; 1729 = 1^3+12^3 = 9^3+10^3

› 1^3 से 10^3 तक याद रखें: 1,8,27,64,125,216,343,512,729,1000

› n^3 = n क्रमागत वषिम संख्याओं का योग; प्रथम वषिम संख्या = n(n-1)+1

› पूर्ण घन की पहचान: हर अभाज्य गुणनखंड ठीक तीन बार आना चाहिए

› गुणा से कमी पूरी करें, भाग से अतिरिक्त गुणनखंड हटाएँ – दोनों तरीके अभाज्य गुणनखंडन पर आधारित हैं।

› a^3 = a; घनमूल प्रतीक , वर्गमूल से अलग

› घनमूल = हर त्रिक (तीन बराबर गुणनखंड) में से एक-एक का गुणनफल